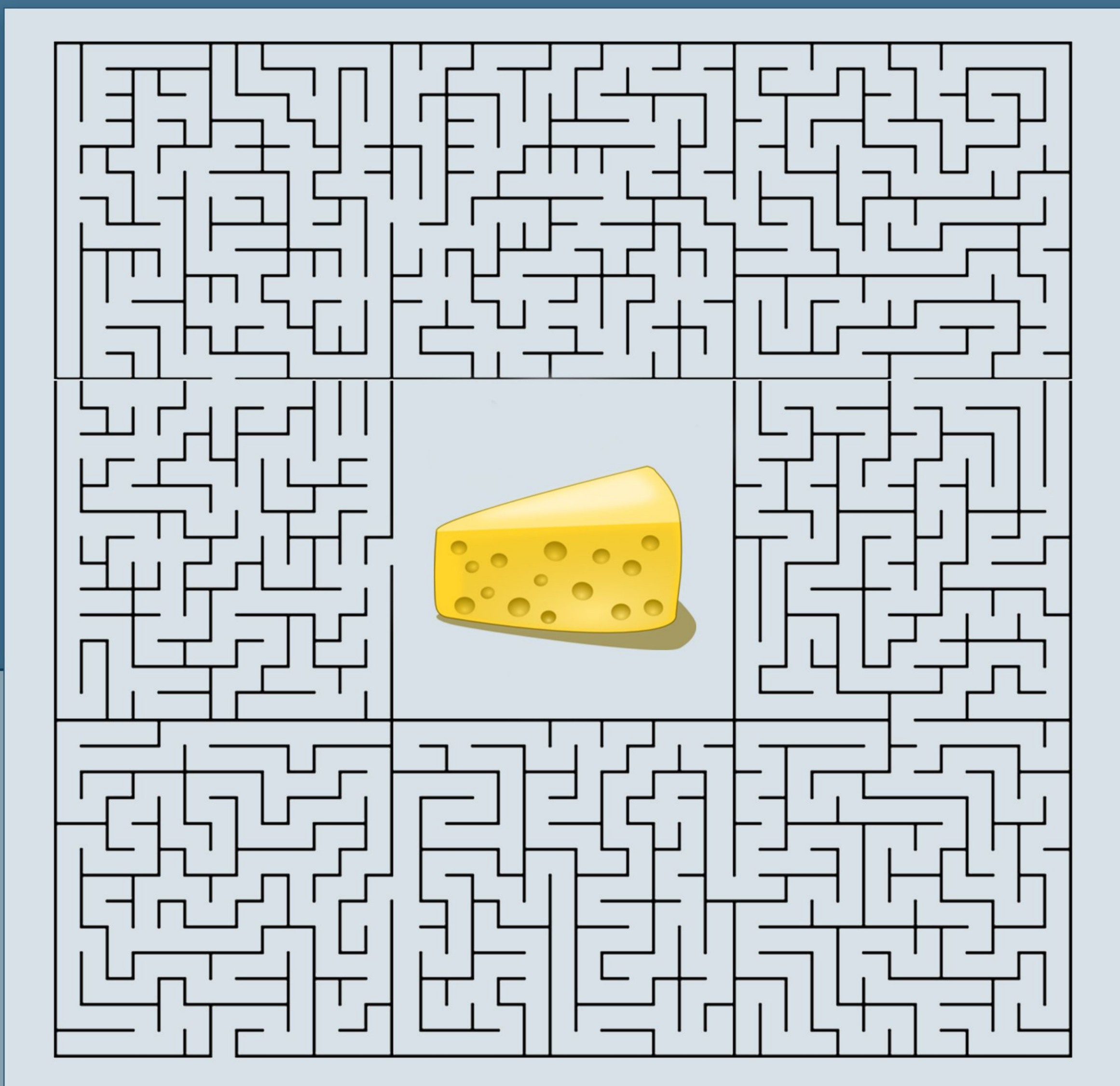
ЛАБИРИНТ

ЛАБоратория Интенсивного Развития ИНТеллекта



№1

февраль 2018

Новосибирск

ОТ РЕДАКЦИИ

Уважаемые читатели!

Этот номер математического альманаха – первый. Идея о его создании появилась достаточно давно, однако актуальной стала, когда накопились материалы по итогам проведения целой серии математических мероприятий, посвященных решению задач исследовательского типа. Это – «Математический марафон» и «Математический Ринрут», каждый из которых проводится по 2 раза в год в Новосибирске. Два мероприятия отличаются друг от друга комплектами задач, формой участия команд (дистанционной для Марафона или очной с выездом в загородный лагерь для Ринрута) и сроками проведения (Марафон – осень и весна, а Ринрут – лето и зима). Однако, их общая суть – командное решение исследовательских задач в формате соревнования. Данный выпуск альманаха посвящен задачам Математического марафона осени 2017 года.
На участие зарегистрировалось 54 команды по 6 человек во главе со своими школьными учителями математики – руководителями команд. Они представили 30 образовательных учреждений из 10 муниципалитетов Новосибирской области (г. Новосибирска, г. Бердска, р.п. Краснообска, р.п. Линево, районов - Татарского, Купинского, Каргатского, Венгеровского, Тогучинского, Искитимского), а также трех других регионов РФ (Республики Тыва, Тюменской и Тверской области).

По итогам Марафона на базе специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета состоялась Конференция с разбором задач и представлением своих решений от команд-победителей. Именно эти решения и представлены в данном номере альманаха.

В заключение добавим, что впереди новый Математический марафон «Весна 2018».
Подробная информация о предстоящем сезоне на http://diogen-nsu.ru/marafon2018

Приглашаем к участию учителей и их школьные команды, готовые к углубленным занятиям математикой!

ФОНД ПРЕЗИДЕНТСКИХ ГРАНТОВ

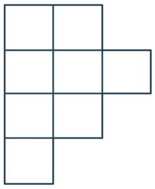
СОДЕРЖАНИЕ

Задача 1.
Полуостров

Таинственный полуостров населен лжецами и рыцарями. Двадцать островитян расположились в вершинах додекаэдра, и все они сделали одинаковые заявления, касающиеся числа рыцарей и лжецов среди их соседей. Какие заявления могут соответствовать действительности, а какие – нет?

Задача 2.
Октамощения

Найдите как можно больше различных замощений плоскости фигурой справа.



Задача 3.
Одномерная жизнь

Дана бесконечная в обе стороны последовательность клеток. Каждая клетка находится либо в возбужденном (ей приписывается 1), либо в невозбужденном (приписывается 0) состоянии, причем в каждый следующий момент времени состояние клетки может измениться. Окрестность клетки – она сама и две пары соседних с ней клеток. Заданная конфигурация из конечного числа возбужденных клеток начинает жить по следующему закону. Клетка возбуждается, если в ее окрестности находятся 2 или 4 возбужденные клетки. Во всех остальных случаях клетка переходит в невозбужденное состояние. Существует ли конфигурация с неограниченно растущим (но не обязательно монотонно) числом возбужденных клеток? Какие интересные конфигурации можно сконструировать?

Задача 4.
Квадрирование квадрата

Сколько можно насчитать квадратов с вершинами в узлах правильной решетки $N \times K$?

Задача 5.
Газонокосилка

Придумайте как можно больше различных способов разрезания квадрата 6×6 на 4 одинаковые части. Резать можно только по сторонам клеток. Способы различны, если различаются части.

Решение задачи „ Полуостров “

Иван Ботов 8 класс,
Гимназия №5, Новосибирск

Предложено 2 тривиальных и 4 нетривиальных расположения рыцарей и лжецов в вершинах додекаэдра.

Для каждого расположения найдены утверждения, которые могут быть сделаны всеми участниками.

Введение

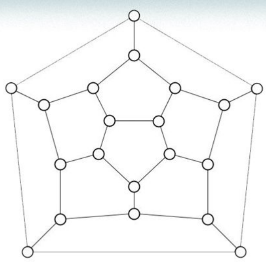
Помимо утверждений о числе соседей в окружении каждого островитянина можно рассматривать утверждения о числе соседей соседей и т.д.

Если для некоторого расположения рыцарей и лжецов существует утверждение, которое может быть сделано всеми, то любое утверждение, логически эквивалентное данному, также могут произнести все.

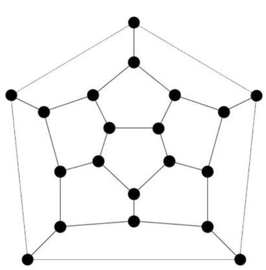
В представленных ниже раскрасках додекаэдра белые вершины соответствуют рыцарям, а черные – лжецам.

Основные результаты

Тривиальные размещения

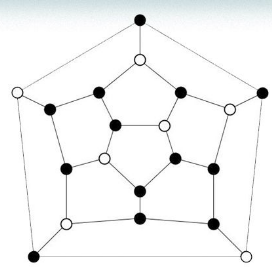


Среди моих соседей есть рыцари.

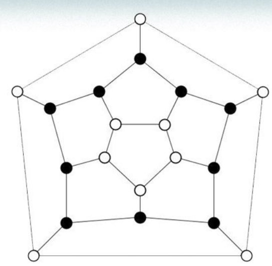


Среди моих соседей ровно 3 рыцаря.

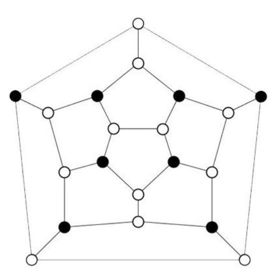
Нетривиальные размещения



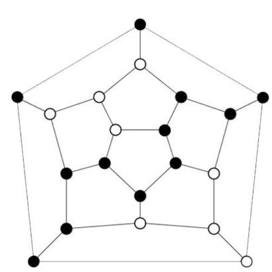
Среди моих соседей ни одного рыцаря.



Среди моих соседей ровно два рыцаря.



Среди моих соседей ровно один рыцарь.



Среди моих соседей, включая меня четное число рыцарей.

Михаил Кобцев,
Михаил Сорокин,
Александр Кротов
10 класс, Лицей №130, Новосибирск

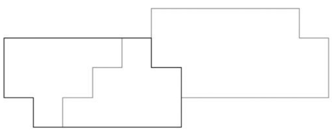
Решение задачи „ Октамощения “

Результаты:

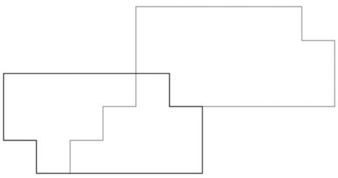
Найдено 9 прямых конструкций замощений плоскости предложенной фигурой. 3 из них служат основой для бесконечных серий.

Конструкции замощений

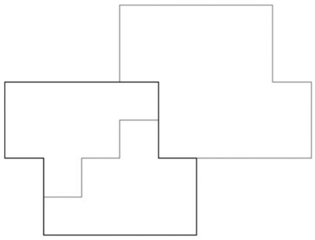
1.



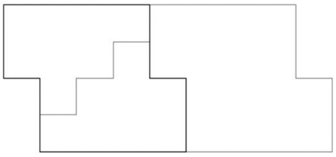
2.



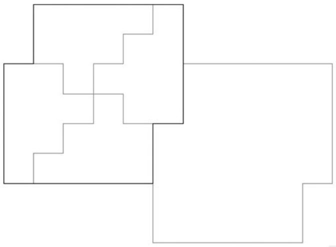
3.



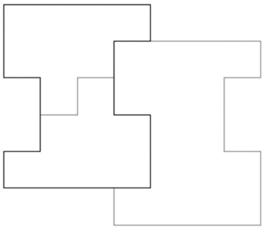
4.



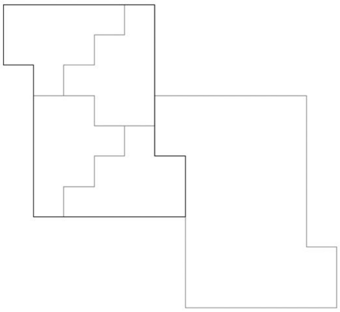
5.



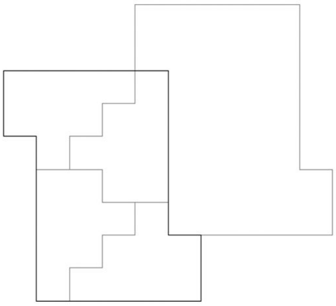
6.



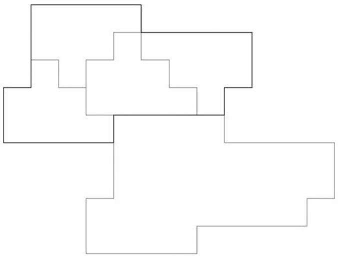
7.



8.



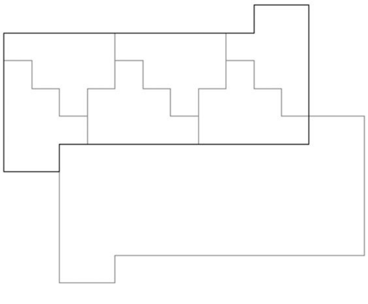
9.



Бесконечные серии замощений

1. При замощении лентами из конструкции №4 каждую ленту можно переворачивать или сдвигать относительно других лент на произвольное число позиций.

2. Базу замощения конструкции №3 можно вставлять между половинами замощений №7 и №8. Так можно создать бесконечное число замощений, периодичных только в одном направлении. Например:



Решение задачи „ Одномерная жизнь “

Александр Храмов, 7 класс,
Гимназия №5, Новосибирск

Найдены конфигурации клеток, порождающие вечно живущие (осциллирующие) и сдвигающиеся в сторону последовательности конфигураций клеток. Изучено развитие всех конфигураций, состоящих из подряд идущих единиц и единиц, расположенных друг от друга на расстоянии 3. Для n ≤ 4 рассмотрены все такие конфигурации из n единиц, что расстояние между соседними единицами не больше 4.

Введение

Приведем несколько простых наблюдений:

1. Если конфигурация состоит из одной возбужденной клетки, то она исчезнет на следующий шаг.
2. Если конфигурация имеет вид отдельно стоящих возбужденных клеток, между которыми 4 и более невозбужденных клеток, то она исчезнет на следующий шаг.
3. При перевороте начальной конфигурации переворачивается и вся порождаемая ею последовательность конфигураций.

Основные результаты

1. Вечно живущая (осциллирующая) конфигурация

		1	1	1		1			1	
	1			1		1	1	1		
		1	1	1		1			1	
	1			1		1	1	1		

2. Конфигурация, которая каждый шаг сдвигается влево (вправо)

			1	1		1	1	1	1			1
		1	1		1	1	1	1			1	
	1	1		1	1	1	1			1		
1	1		1	1	1	1			1			

Отражение этой конфигурации (конфигурация 1001111011) сдвигается каждый шаг вправо

3. Конфигурация, в которой неограниченно растет расстояние между крайними единицами

Конфигурация начинается с конфигурации, сдвигающейся влево, на расстоянии не меньше 4 от него располагается одна или несколько вечно живущих конфигураций, а затем на расстоянии не меньше 4 идет сдвигающаяся вправо конфигурация.

Пример: 1101111001 0000 10010111 0000 1001111011

4. Конфигурация из n единиц, стоящих на расстоянии 3 друг от друга

Конфигурация исчезает после -ого шага.

	1				1				1			…	1				1				1			n
			1				1				1	…			1				1					n-1
					1				1			…	1				1							n-2
							1				1				1									
									1				1											
											1													1

5. Конфигурация из n подряд идущих единиц

Любая конфигурация из n подряд идущих единиц исчезает. Если n≥10, то такая конфигурация исчезнет на пятом шаге.

					1	1	1	1	1	…k>0…	1	1	1	1				
1				1		1							1		1			
2				1	1	1							1	1	1			
3			1				1			…		1				1		
4					1									1				
5																		

Для конфигураций из n≤9 подряд идущих единиц непосредственно проверяется, что они исчезают. Дольше всех живет конфигурация из 5 единиц (17 шагов).

6. Конфигурации из двух клеток

Число конфигураций из двух клеток, в которых расстояние между соседними не больше 3, равно 4. Все такие конфигурации исчезают. Дольше всех живет конфигурация 1001 (4 шага).

7. Конфигурации из трех клеток

Число различных конфигураций из трех клеток, в которых расстояние между любыми двумя соседними не больше 3, равно 10. Все такие конфигурации исчезают. Дольше всех живут конфигурации 110001 и 101001 (19 шагов).

8. Конфигурации из четырех клеток

Рассмотрены некоторые конфигурации из четырех клеток, в которых расстояние между любыми двумя соседними не больше 3 (20 конфигураций). Большинство рассмотренных конфигураций исчезает, но две из них, а именно конфигурации 110010001 и 100100010001 будут жить вечно, поскольку переходят в осциллирующую конфигурацию из п. 2.1.

От редакции:

еще одно решение этой задачи предложено Иваном Ильиных - 9 класс, гимназия №12 г. Новосибирска. Пошаговое моделирование поведения конфигураций осуществлялось в виде заполнения таблицы в среде Microsoft Office Excel. В результате были также найдены осциллирующая конфигурация, конфигурации, сдвигающиеся на каждом шаге в сторону и в которых неограниченно росло расстояние между крайними единицами. Дополнительно обнаружена неизменная конфигурация 10111101. Кроме того, найдено, что конфигурация 11011011 порождает периодическую последовательность, имеющую период 22, а конфигурация 1000111101 порождает последовательность конфигураций, которая каждые 9 шагов сдвигается на одну позицию влево.

Решение задачи „Квадрирование квадрата“

Александр Кротов, 10 класс,
Лицей №130, Новосибирск

Выведена явная формула для числа квадратов с вершинами в узлах решетки N×K.

Введение

Для подсчета числа квадратов, которые можно вписать в узлы квадратной решетки размера N×K, используются следующие формулы суммы первых n натуральных чисел, а также формулы для сумм их квадратов и кубов:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}.$$

Основной результат

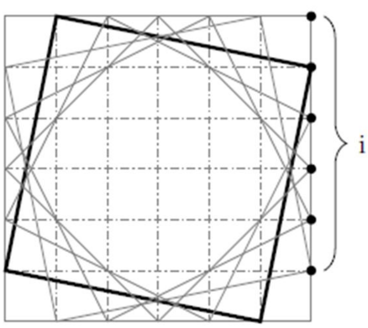
Теорема:

Пусть N≤K. Число квадратов f(N,K), вписанных в узлы решетки N×K, равно

$$f(N,K) = -\frac{1}{12}N^4 + \frac{1}{6}N^3K - \frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{2}N^2K + \frac{1}{12}N^2 + \frac{1}{3}NK + \frac{1}{6}N.$$

Доказательство:

Габариты квадрата определяются длинами его проекций на стороны решетки. В квадрат с габаритами i×i можно вписать i различных квадратов с габаритами i×i:



Количество позиций, на которых можно разместить квадрат с габаритами i×i, равно (N-i+1) по направлению короткой стороны, и (K-i+1) по направлению длинной.

Поэтому общее число квадратов габаритов i×i равно i(N-i+1)(K-i+1), а всего квадратов в решетке

$$f(N,K) = \sum_{i=1}^{N} i\,(N-i+1)(K-i+1) = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)\,(N-j)(K-j).$$

Преобразуем это выражение:

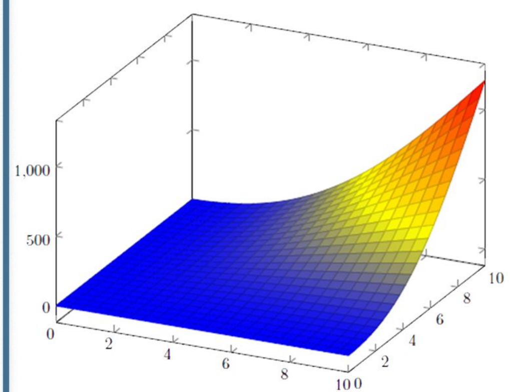
$$\begin{aligned} f(N,K) &= \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)\,(N-j)(K-j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(j^3 - j^2(N+K-1) + j(NK-N-K) + NK\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} j^3 - (N+K-1)\sum_{j=0}^{N-1} j^2 + (NK-N-K)\sum_{j=0}^{N-1} j + N^2K. \end{aligned}$$

Используя формулы для сумм первых n натуральных чисел, сумм их квадратов и третьих степеней, получаем

$$f(N,K) = -\frac{1}{12}N^4 + \frac{1}{6}N^3K - \frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{2}N^2K + \frac{1}{12}N^2 + \frac{1}{3}NK + \frac{1}{6}N.$$

Дополнительные результаты

График функции f(min (x,y), max (x,y)):



От редакции:

еще одно решение этой задачи было предложено Софьей Лыловой (8 класс) и Татьяной Шерстюгиной (9 класс) - гимназия №5 г. Новосибирска. В их работе формула для числа квадратов в решетке оставлена в виде суммы. Также они вычислили число квадратов в решетках размера N×K для всех N,K≤3.

Михаил Кобцев, 10 класс,
Лицей №130, Новосибирск

Решение задачи „ Газонокосилка “

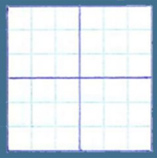
Перечислены все 37 неэквивалентных разрезаний квадрата 6×6 на четыре одинаковые связные части.

Введение

Все разрезания можно разделить на две группы
1. Разрезания с симметрией относительно центра квадрата.
2. Разрезания, в которых две части составляют прямоугольник размера 3×6.

Единственное разрезание, которое лежит в обеих группах – это разрезание на четыре квадрата 3×3. Назовем такое разрезание стандартным.

Если разрезание симметрично относительно центра, то все четыре клетки в центре квадрата принадлежат разным фигурам, поскольку при повороте они переходят друг в друга.

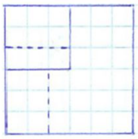


Основные результаты:

1. Центрально симметричные разрезания

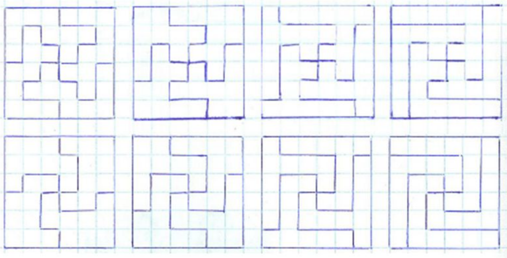
Будем изменять разрезания путем добавления клеток к каждому из квадратов 3×3 стандартного разрезания и вырезания их же с другой стороны, опираясь на симметрию.

Сначала перечислим все связные разрезания, которые получаются из стандартного переносом клеток из прямоугольника 2×3, прилегающего к центральной клетке, в симметричный ему прямоугольник 3×2.



Всего 17 различных связных разрезаний:

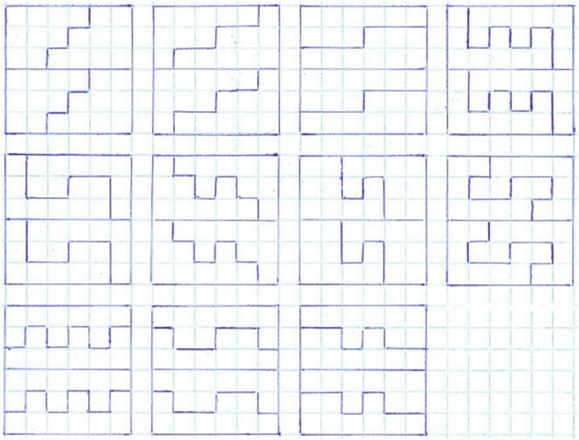
Затем перечисляем разрезания на такие фигуры, в которых клетка, наиболее близкая к центру квадрата, не может быть включена в прямоугольник размера 1×3 или 3×1. Таких различных разрезаний получается 8 штук:



Следовательно, число различных связных разрезаний, симметричных относительно центра, за исключением стандартного разрезания, равно 25.

2. Разрезания, содержащие прямоугольник 3×6

Такие разрезания находим путем перебора всех возможных разрезаний прямоугольника 3×6 на две одинаковые связные части. Получим всего 11 таких разрезаний, не считая стандартного:

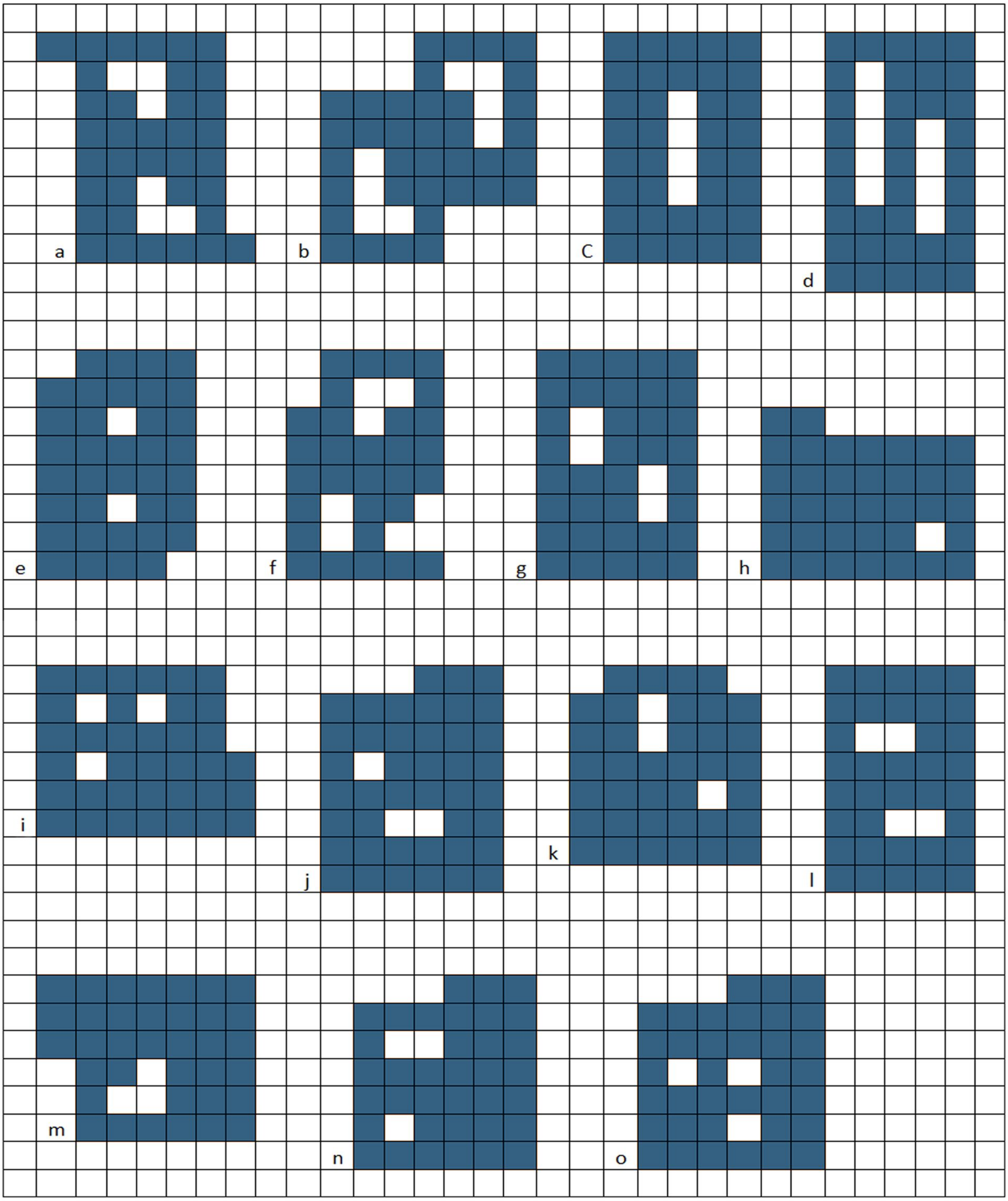


Таким образом, число связных разрезаний квадрата 6×6 на четыре одинаковых связных части равно 37.

От редакции:

команда гимназии №17 "Сибирская" предложила еще одно решение этой задачи. В виде компьютерной программы были реализованы рекурсивные алгоритмы построения разрезаний, обладающих центральной или осевой симметрией.
В результате работы алгоритма перечислены все 37 различных разрезаний квадрата.

Разрезать на две связные части и составить из них квадрат 6х6.



Решения задач можно присылать по адресу **math.labirint@gmail.com**

На данный адрес также можно высылать предложения и замечания, вопросы и статьи для публикации в следующих номерах альманаха (направление исследований – точные и естественные науки).

Математические марафоны и выпуск альманаха выполняются по проекту «Математический РИНРУТ» как технология выявления и развития одаренных детей и молодых людей через внедрение инновационных образовательных подходов и практик» с использованием гранта Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленного Фондом президентских грантов (заявка № 17-2- 002896).

Проект реализует автономная некоммерческая организация дополнительного образования детей и взрослых «Институт интеллектуально-творческого развития «ДИО-ГЕН» в сотрудничестве со специализированным учебно-научным центром Новосибирского государственного университета.

Научное и экспертное сопровождение проекта осуществляет Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и Новосибирский государственный университет.

Над номером работали:
к.ф.-м.н. С.В. Августинович, Л.А. Дмитриева, к.ф.-м.н. А.А. Тараненко, А.А. Фёдорова

Новосибирск, 2018 год

ДИО-ГЕН

ФОНД ПРЕЗИДЕНТСКИХ ГРАНТОВ
президентскиегранты.рф

ИМ СО РАН